GENELLEŞTİRİLMİŞ YAYILMA PROBLEMİ İÇİN YENİ BİR TAMSAYILI KARAR MODELİ

İmdat Kara, Yasin Ünlü, Eray Çakıcı, Tolga Bektaş
Başkent Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, Ankara

Özet: Enküçük Yayılma Probleminin (minimal spanning tree) genel hali, 1995'de Myung ve diğerleri tarafından Genelleştirilmiş Yayılma Problemi (GYP) olarak tanımlanarak, bu problemin *NP*-Zor olduğu gösterilmiştir. Düğümler kümesi *V* ve ayrıtlar kümesi *A* olan *G* = (*V*, *A*) seriminde, düğümler kümesi karşılıklı ayrık ve bütünü oluşturan alt kümelere ayrıştırılsın. GYP, alt kümelerin (bölgelerin), her alt kümeden bir düğümle, toplam maliyet (uzaklık vb.) enküçük olacak şekilde birbirleriyle ilişkilendirilmesidir. GYP için, bu güne kadar, cok sayıda karar modeli önerilmiş olmakla birlikte, polinom sayıda 0-1 karar değişkeni ve kısıttan oluşan model sayısı oldukça azdır.

Bu bildiride GYP için, düğüm tabanlı ve kuvvetlendirilmiş Miller – Zemlin – Tucker alttur engelleme kısıtlı yeni bir karma tam sayılı karar model sunulmaktadır. Polinom sayıda 0-1 tamsayı değişken ve kısıttan oluşu model, herhangi bir kodla doğrudan kullanılabilecek özelliktedir. Bildiride, karşılaşılabilir özel tutum ve eğilimlerin, modele ek kısıtlarla yansıtılabileceği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Tamsayılı Programlama, Yayılma Problemi, Modelleme*

1. Giriş

Düğümler kümesi *V*, ayrıtlar (simetrik veya asimetrik) kümesi A olan bir serimde, bağlantı yapılmış ayrıt uzaklıklarının (maliyet vb. de olabilir) toplamını enküçükleyecek şekilde, düğümlerin birbirleriyle ilişkilendirme (bağlantı) problemi Enküçük Yayılma Problemi (EYP) (minimal spanning tree problem) olarak isimlendirilir. Gerçek hayatta pek çok uygulaması olan bu problem için kolay ve etkin özel algoritmalar (Kruskal, Prim vb.) geliştirilmiştir (uygulamalar ve algoritmalar için bkz. Ahuja vd. (1993)). EYP'nin matematiksel modellerine ilginin az olmasının nedenlerinin başında, bu tür algoritmaların olduğu söylenebilir.

Gerçek hayatta hiçbir problem akademisyenler tarafından tanımlandıkları şekliyle ortaya çıkmaz. Çoğunlukla, karar vericinin özel tutum ve eğilimleri probleme yansır ve problemin yapısı ek kısıtlar gerektirir. Yanısıra, çoğu problemler için tek bir eniyi çözüm yerine, farklı durum ve koşullara göre bulunacak eniyi çözümler, karar sürecinin etkinliğini artırır. Değinilen bu ve benzeri ihtiyaçlar, yazılım ve donanım teknolojilerinin sunduğu yeni olanaklarla birlikte değerlendirilerek, 90'lı yıllarla birlikte, EYP ve bunun özel hallerinin matematiksel modelleri üzerindeki çalışmalarının yoğunlaştığı gözlenmektedir.

Matematiksel modelleme çalışmalarının yoğunlaştığı özel bir EYP de Genelleştirilmiş Yayılma Problemi (GYP)'dir. Düğümler kümesi alt kümelere (bölgelere) ayrıştırılmış bir serimde, bölgelerin birbiriyle bağlantısı GYP olarak ele alınmaktadır. GYP, Myung, Lee ve Tcha (1995) tarafından tanımlanarak, *NP*-Zor bir problem olduğu gösterilmiştir. Problemin NP zor olması, doğrudan çözümünün kolay olmayacağını ortaya çıkarmış, böylece çözüm arayışları iyi bir sınır değer verecek matematiksel modellere dayalı özel algoritmalar üzerinde yoğunlaşmıştır. Daha sonra, Dror, Haouari ve Chaouachi (2000) aynı problem üzerinde benzer çalışma yapıp, sulama ağı probleminin çözümünü araştırmışlar; Feremans, Labbe ve Laporte (2001) bunların makalesinde bir dizi düzeltme yapmışlardır.

Feremans ve diğerleri (2002), Myung ve arkadaşlarının önerdikleri dört matematiksel modeli esas alarak, küçük eklentilerle dört yeni model daha önermiş, dördü yönlü ve dördü yönsüz serimler için toplam sekiz matematiksel modeli, gevşetilmiş doğrusal programlama değerleriyle karşılaştırmışlardır. Daha sonra aynı yazarlar (Feremans vd. (2004)), bu problemin çokyüzlü (polyhedral) analizini yaparak, dallandır ve kes algoritması ile sezgiseller geliştirmişlerdir. Kaynaklarda yer alan polinom sayıda karar değişkeni ve kısıtlı modellerin tamamı ayrıt tabanlı ve problemin yalın halinine çözüm bulmak için kullanılabilr modeller olup, karşılaşılabilir ek kısıtlara elverişli değildirler.

GYP, telekominikasyon ağları; yerel iletişim ağlarının birleştirilmesi; petrol, doğalgaz vb. boru hatları; mağaza zincirleri için yer seçimi vb. durumlarda uygulanabilir. Bu nedenle GYP için mevcut yazılım ve donanım teknolojileriyle doğrudan çözüm verebilecek, böylece, hem karşılaşılabilecek ek kısıtların gözönüne alınabileceği, hem de eniyi çözüm sonrası analizlerin yapılabileceği matematiksel modellerin geliştirilmesi çok faydalı olacaktır. Bu çalışmanın amacı da belirtilen yönde bir katkı sağlamaktır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, GYP tanımlanarak yeni bir karar modeli sunulmuştur. Önerilen modelin sağladığı kolaylıklarla sonuçlar üçüncü bölümde yer almıştır.

2. Genelleştirilmiş Yayılma Probleminin Modellenmesi

$V = \{1, 2, 3, ..., n\}$ düğümler ve $A = \{(i, j)\}: i \neq j \in V\}$ ayrıtlar kümeleri olmak üzere, V_0 , başlangıç (kök) bölge iken, $K = \{0, 1, 2, 3, ..., k\}$ bölgeler kümesi olup, $V_i \cap V_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j \in K$ ve $\cup_i V_i = V$ olsun.

Karar değişkenleri, x_{ij} ve u_p lerle; parametreler c_{ij} lerle gösterilip şöyle tanımlanmışlardır:

x_{ij} : i'inci düğüm j'inci düğümle bağlanırsa 1, değilse 0,
u_p : Kök bölgeden itibaren p'inci bölgeye gelene kadar yapılan bağlantı sayısı, $p \in K$,
c_{ij} : i ve j düğümlerinin bağlantı uzaklığı (maliyeti v.b.).

Kısıtlar şunlardır:

1. Bölgelerin içindeki düğümler arası bağlantı yapılmaz.
2. Her bölgeye kök veya başka bir bölgeden bir bağlantı yapılmalıdır.
3. Farklı iki bölge arasında ancak bir bağlantı olabilir.
4. Kök bölge dışındaki bölgeler arası bağlantılar aynı düğümle yapılabilir.

Problem, kök bölgeden başlayarak, toplam uzaklık (veya maliyet) enküçük olacak şekilde, tüm bölgeleri kapsayan bağlantıların bulunması olarak ifade edilebilir.
GYP için önermiş olduğumuz yeni model şöyledir:

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = k \qquad (1)$$

$$\sum_{i\in V\setminus V_p} \sum_{j\in V_p} x_{ij} = 1, \qquad p = 1,2,...,k \qquad (2)$$

$$\sum_{i\in V\setminus V_p} x_{ij} - \sum_{h\in Vq} x_{jh} \geq 0 \qquad j \in V_p, p \neq q, p, q = 1,2,...,k \qquad (3)$$

$$u_p - u_q + k\sum_{i\in V_p} \sum_{j\in V_q} x_{ij} + (k-2)\sum_{i\in V_q} \sum_{j\in V_p} x_{ij} \leq k-1, \qquad p \neq q, p, q = 1,2,...,k \qquad (4)$$

$$u_p + (k-1)\sum_{i\in V_0} \sum_{j\in V_p} x_{ij} \leq k, \qquad p = 1,...,k \qquad (5)$$

$$u_p + \sum_{i\in V_0} \sum_{j\in V_p} x_{ij} \geq 2, \qquad p = 1,...,k \qquad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad (i, j) \epsilon A \qquad (7)$$

kısıtları altında,

$$\text{Enk.} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

Bu modelde, (1) no.lu kısıt kök bölge ile birlikte toplam bölge sayısından bir eksik sayıda ayrıtın bağlantılı olmasını, (2) no.lu kısıt ara bölgelerin her birine bir başka bölgeden bir girişi garanti etmektedir. (3) no.lu kısıtla bir bölgenin başka bir bölge ile, o bölgedeki bağlantı üzerine alınan bir düğümle birleştirilebileceği, böylece yayılmanın sürekliliği sağlanmaktadır. (4) no.lu kısıt, kuvvetlendirilmiş Miller-Tucker-Zemlin (Miller et al.1960; Gouveia, 1995) alttur engelleme kısıtlarının ilk defa GYP'ye uyarlanması olup, altturları izin vermediği kolaylıkla gösterilebilir. (5) ve (6) nolu kısıtlar, kökten ilk bağlantı yapılan bölgenin karşı gelen u değişkenine 1 değer atanmasını , yanısıra da, u_p değişkenlerinin alabileceği en fazla değerin k olmasını sağlamaktadır.

Kolaylıkla görülebileceği gibi, önerilen modelde, n^2-n kadar 0-1 tamsayı değişken olup, kısıt sayısı ise en fazla nk-n+k^2+2k+1 kadardır. Yani, önerilen model, tamsayı değişken ve kısıt sayısı yönüyle O(n^2) olup, herhangi bir kodla doğrudan kullanılabileck özelliktedir.

3. Tartışma ve sonuç

Gerçek yaşamda karşılaşılan GYP, esas itibariyle yatırım yönü ağırlıklı, yani tasarım boyutu önemli problemler olup, bu aşaması, yerine göre aylar süren etkileşimli bir uğraştır. Böyle problemlerde, modelin çözüm süresinin saat, bir iki gün, hatta bir hafta gibi zaman alması hiç önemli değildir. Bu tür problemlerin modellenmesinde üzerinde durulması gereken, modelin kolay anlaşılır ve kullanılabilir olmasının yanısıra, farklı tutum ve eğilimlerin modele yansıtılabilmesi ve eniyi çözüm sonrası analizlerin yapılabilmesidir.

GYP için önerilen modelin kolay ve kullanıcı odaklı olduğu açıktır. Karşılaşılabilir özel tutum ve eğilimlerin modele nasıl yansıtılabileceği aşağıda örneklenmektedir.

i. Kök bölgeden itibaren bağlantı sayısına sınır konmak, yani, herhangi bir bölgeye kökden itibaren en fazla verilen bir sayıda ayrıtla erişilmiş olması istensin. Verilen bu değer "*s*" ile gösterilerek, modelin (4), (5) ve (6) nolu kısıtlarında "*k*" yerine "*s*" konması yeterlidir.

ii. Bölgeler arasında, bağlantı konumları itibariyle öncül / ardıl ilişkiler istenebilir. Böyle tutumlar, ya yeni kısıtlarla ya da karşı gelen u_i'lerle, modele ek kısıt olarak yansıtılabilir. Sözgelimi, kök bölgeden itibaren bağlantı sırasında, *r*'inci bölgenin bağlantı sırası, *q*'uncu bölgenin bağlantı sırasından fazla olması istenirse, modele, $u_r \geq u_q + 1$ kısıtının eklenmesi yeterli olur.

iii. Bazı GYP'lerde, bölge içi yayılmalar sözkonusu olup, bölgelerarası bağlantılarda aynı düğümle ilişkilendirme zorunluluk olmaktan çıkabilir. Bu taktirde, önerilen modelin (3) nolu kısıtlarının kaldırılması yeterli olur ki, model, kısıt sayısı yönüyle O(k^2) ye indigenir.

Yukarıda örneklenenlere benzer özel tutumların modele yansıtılabilirliği, beraberinde bu modelle eniyi çözüm sonrası analizlerin de yapılabileceğini göstermektedir. Bildiride, TSP kütüphanesinden çözülen problemlerin süreleriyle, bu problerle ilgili analizlere yer verilmiştir.

Kaynaklar

Ahuja, R.K., Magnanti,T.L. , and Orlin, J.B., *Network flows: Theory, algorithms, and applications.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

Dror, M. , Haouari, M. and Chaouachi, J. , Generalized spanning trees. *EJOR* 120, 583-592, 2000.

Feremans, C. , Labbe, M., and Laporte, G., On generalized minimum spanning tree, *EJOR* 134 (2001), 457-458.

Feremans, C. , Labbe, M., and Laporte, G., A comparative analysis of several formulations for the generalized minimum spanning tree problem, *Networks* 39, 29-34, 2002.

Feremans, C. , Labbe, M. and Laporte, G. , The generalized minimum spanning tree problem: Polyhedral analysis and branch-and-cut algorithm. *Networks* 43 (2004), 71-86.

Gouveia, L., Using the Miller-Tucker-Zemlin constraints to formulate a minimal spanning tree problem with hop constraints. *Computers and operations Research*, 22 (9), 959-970, 1995.

Miller, C.E., Tucker, A.W., and Zemlin, R.A., Integer programming formulation of traveling salesman problems, *Journal of Association for Computing Machinery* 7 (1960), 326-329.

Myung, Y-S., Lee, C-H., and Tcha, **D-W.,** On the generalized minimum spanning tree problem. *Networks* 26 (1995), 231-241.